Complementi di Algoritmi e Strutture Dati

Programmazione lineare

Docente: *Nicolò Cesa-Bianchi* versione 10 maggio 2017

Moltissimi problemi reali si prestano ad essere modellati in termini di ottimizzazione lineare (detta anche programmazione lineare, o LP). A dispetto di questa generalità, i problemi di LP possono essere risolti in computazionalmente efficiente. Inoltre, la LP è concettualmente utile, in quanto fornisce uno strumento potente e versatile per l'analisi teorica di svariati problemi.

Per introdurre la LP possiamo partire dalla soluzione di sistemi di equazioni lineari

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \quad \cdots \quad &+ a_{1,n}x_n = b_1 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \quad \cdots \quad &+ a_{m,n}x_n = b_m \end{aligned}$$

dove $\{a_{i,j} \,:\, i = 1, \dots, m,\, j = 1, \dots, m\}$ e $b_1, \dots, b_m$ sono coefficienti reali noti e lo scopo è trovare un assegnamento a $x_1, \dots, x_n$ che soddisfi le m equazioni lineari. Un semplice esempio con $n = m = 2$ è

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

È utile pensare al sistema in termini geometrici: $2x_1 + x_2 = 1$ e $x_1 + 2x_2 = 1$ sono le equazioni di due rette nel piano e la soluzione del sistema (se esiste) è il punto di intersezione delle rette. In n dimensioni, le equazioni lineari $a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,n}x_n = b_k$ definiscono degli iperpiani e la soluzione del sistema (sempre se questa esiste) è data da un qualunque punto all'intersezione degli iperpiani. Si rammenta infatti che un sistema di m equazioni lineari in n incognite può avere zero, una, o infinite soluzioni (teorema di Rouché-Capelli) a seconda della relazione fra n e i ranghi delle matrici A e B, dove

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n},\ b_1 \\ & \vdots & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n},\ b_m \end{bmatrix}$$

In LP le equazioni lineari possono essere sostituite da disequazioni della forma $a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,n}x_n \le b_k$. Ogni disequazione lineare definisce un semispazio e un sistema di disequazioni lineari definisce una regione —chiamata regione ammissibile— determinata dall'intersezione di semispazi (cioè un poliedro). La soluzione del problema di LP è il "miglior" punto $(x_1, \dots, x_n)$ all'interno della regione ammissibile (se essa contiene almeno un punto), dove migliore è riferito al valore di una funzione obiettivo $f(x_1, \dots, x_n)$ che è anch'essa lineare nelle sue variabili.

Gli ingredienti di un programma lineare sono quindi:

1. Variabili di decisione $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.
2. Vincoli lineari

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \le b_i \quad \text{oppure} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i \quad \text{oppure} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \ge b_i$$

3. Funzione obiettivo lineare

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{oppure} \quad \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

In pratica, possiamo sempre ridurre un problema LP in un problema equivalente (cioè, con la stessa soluzione) della forma

$$\begin{aligned} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i & \qquad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Infatti, un vincolo $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geq b_i$ può essere equivalentemente riscritto come $\sum_{j=1}^{n} (-a_{i,j}) x_j \leq -b_i$ semplicemente cambiando segno ai coefficienti. Un vincolo $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i$ può essere sostuito da due vincoli $\leq$ e $\geq$. Un problema $\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ può essere equivalentemente riscritto come $\max \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$ sempre cambiando segno ai coefficienti.

Per continuare a sviluppare l'intuizione geometrica, consideriamo il seguente problema LP,

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Le curve di livello $\{x_1 + x_2 = v \,:\, v \in \mathbb{R}\}$ della funzione obiettivo sono rette con coefficiente angolare -1. Dato che i primi due vincoli impongono di cercare la soluzione nel quadrante positivo, possiamo pensare di risolvere il problema considerando la retta $x_1 + x_2 = v$ per valori di v crescenti a partire da $v = 0$. L'ottimo della funzione obiettivo corrisponde quindi all'ultimo punto di intersezione della retta $x_1 + x_2 = v$ (per $v \geq 0$ crescente) con la regione ammissibile.

In generale possiamo riassumere come segue.

- La regione ammissibile di un problema LP è l'intersezione dei semispazi corrispondenti ai vincoli lineari. Tale regione può essere limitata, vuota o illimitata (pensate, per esempio, a un caso con due soli vincoli $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$). Se la regione ammissibile è vuota allora non esistono soluzioni (ammissibili) al problema.
- Le curve di livello della funzione obiettivo $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$ sono iperpiani ortogonali al vettore $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)$.
- La soluzione ottima è il punto della regione ammissibile più lontano nella direzione di $\boldsymbol{c}$ (per un problema di massimo).
- Se la regione ammissibile è illimitata, allora la soluzione ottima può essere infinita. Questo avviene quando il prolungamento di $\boldsymbol{c}$ non esce mai dalla regione ammissibile.
- Se la soluzione ottima esiste ed è finita, allora è uno dei vertici del poliedro che definisce la regione ammissibile. Può capitare che la soluzione ottima si trovi su un vertice che sta su una faccia del poliedro ortogonale a $\boldsymbol{c}$. In questo caso tutti i punti della faccia del poliedro sono soluzioni ottime.

Ricapitolando ulteriormente, un problema di LP può avere:

1. almeno una soluzione ottima finita,
2. una soluzione ottima infinita,
3. zero soluzioni ammissibili.

Vediamo ora primo problema che possiamo formulare come LP. Consideriamo un poliedro definito da un sistema di disequazioni lineari,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i \qquad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

Ricordiamo che un punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ appartiene al poliedro se e solo se $\boldsymbol{x}$ soddisfa il sistema di disequazioni (1).

Vogliamo determinare il centro della più grande sfera completamente contenuta nel poliedro (detto centro di Chebyshev). Le variabili di decisione sono quindi il centro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e il raggio $r \in \mathbb{R}$ e vogliamo massimizzare r sotto il vincolo che la sfera di centro $\boldsymbol{x}$ sia contenuta nel poliedro. I punti sulla sfera sono della forma $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}$, dove $\boldsymbol{u}$ è un vettore di norma r, $\|\boldsymbol{u}\| = r$. Quindi la sfera $(\boldsymbol{x}, r)$ è contenuta nel poliedro se e solo se

$$\max_{\boldsymbol{u} : \|\boldsymbol{u}\| = r} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \big(x_j + u_j\big) \leq b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

Notiamo ora che, detto $\boldsymbol{a}_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})$,

$$\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{u} : \|\boldsymbol{u}\| = r} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \big(x_j + u_j\big) &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j + \max_{\boldsymbol{u} : \|\boldsymbol{u}\| = r} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} u_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j + \frac{r}{\|\boldsymbol{a}_i\|} \|\boldsymbol{a}_i\|^2 \qquad \text{(per } \boldsymbol{u} = (r/\|\boldsymbol{a}_i\|)\boldsymbol{a}_i\text{)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j + r \|\boldsymbol{a}_i\|
\end{aligned}$$

Per capire la seconda uguaglianza ricordiamo che, dati due vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ che formano un angolo θ fra loro, vale che

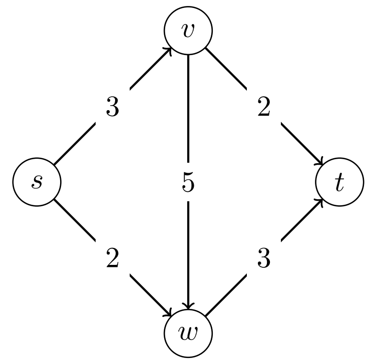
$$\sum_{j=1}^{n} u_j v_j = \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \cos\theta \ .$$

Quindi il massimo si ha quando $\cos\theta = 1$ ovvero quando i due vettori sono allineati. In tal caso $\boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{v}$ per un qualche $\alpha > 0$ e quindi $\sum_{j=1}^{n} u_j v_j = \alpha \|\boldsymbol{v}\|^2$. Il vettore $\boldsymbol{u}$ di norma r che massimizza $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} u_j = \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{u}$ è quindi $\boldsymbol{u} = (r/\|\boldsymbol{a}_i\|)\boldsymbol{a}_i$.

Dato che $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j + r \|\boldsymbol{a}_i\| \leq b_i$ è un vincolo lineare, il centro di Chebyshev è la soluzione del programma lineare

$$\begin{aligned}
&\max \ r \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j + r \|\boldsymbol{a}_i\| \leq b_i \qquad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}$$

Vediamo ora un secondo esempio di problema che si presta ad una formulazione LP. Il problema di flusso massimo (max flow) consiste nel determinare qual è il massimo flusso che può essere fatto scorrere tra un vertice sorgente e un vertice destinazione in un grafo orientato i cui archi hanno una capacità limitata. Più formalmente, sia $G = (V, E)$ un grafo orientato tale che per ogni $u, v \in V$, $(u, v) \in E$ implica $(v, u) \notin E$ e, inoltre, $(v, v) \notin E$. Sia $s \in V$ un vertice sorgente e $t \in V$ un vertice destinazione (senza perdita di generalità, possiamo assumere che s non ha archi entranti e t non ha archi uscenti). Sia inoltre $c : E \to \mathbb{N}$ una funzione che assegna una capacità $c(e)$ intera positiva ad ogni arco del grafo (si veda la figura qui sotto).



Un flusso è una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ che assegna un flusso $f(e) \geq 0$ ad ogni arco di G. Un flusso ammissibile deve soddisfare le due seguenti condizioni:

1. Vincolo di capacità: $f(e) \leq c(e)$ per ogni $e \in E$.
2. Vincolo di conservazione: per ogni vertice $v \in V$ diverso da s e t, la somma dei flussi sugli archi entranti in v dev'essere uguale alla somma dei flussi sugli archi uscenti da v.

Per esempio,

$$f(s, v) = 3 \quad f(s, w) = 2 \quad f(v, w) = 1 \quad f(v, t) = 2 \quad f(w, t) = 3$$

è un flusso ammissibile rispetto al grafo in figura. L'obiettivo è calcolare un flusso massimo ammissibile. Ovvero, un flusso ammissibile che massimizza il flusso sugli archi uscenti da s (o, equivalentemente, il flusso sugli archi entranti in t).

Per dare una formulazione LP al problema di flusso massimo allochiamo una variabile di decisione x_e per ogni arco $e \in E$ del grafo. Indichiamo con c_e i valori $c(e)$ di capacità. Introduciamo infine la notazione N_v^+ e N_v^- per indicare, rispettivamente, l'insieme degli archi uscenti ed entranti di v. Possiamo quindi scrivere il programma lineare

$$\begin{array}{rll} \max & \displaystyle\sum_{e \in N_s^+} x_e & \\ x_e & \geq 0 & e \in E \\ x_e & \leq c_e & e \in E \\ \displaystyle\sum_{e \in N_v^-} x_e & = \displaystyle\sum_{e \in N_v^+} x_e & v \in V \setminus \{s, t\} \end{array}$$

I vincoli $x_e \geq 0$ ci dicono che i flussi non possono essere negativi. I vincoli $x_e \leq c_e$ implementano il vincolo di capacità, mentre i vincoli $\sum_{e \in N_v^-} x_e = \sum_{e \in N_v^+} x_e$ implementano il vincolo di flusso.