Complementi di Algoritmi e Strutture Dati

Dualità nella programmazione lineare

Docente: *Nicolò Cesa-Bianchi* versione 30 maggio 2018

Consideriamo il seguente programma lineare

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \le b_i \qquad i = 1, \dots, m$$
$$x_j \ge 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

Indichiamo con A la matrice $m \times n$ dei coefficienti $a_{i,j}$ per $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Definendo $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_m)$ e $\boldsymbol{0} = (0, \dots, 0)$, possiamo riscrivere il programma lineare come

$$\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & A\,\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{array} \tag{1}$$

dove abbiamo usato la notazione $\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{v} = \sum_i u_i v_i$, mentre la notazione $\boldsymbol{u} \le \boldsymbol{v}$ è equivalente a $u_i \le v_i$ per ogni i.

Un primo passo per capire la dualità è osservare che in un LP posso usare i vincoli per maggiorare l'ottimo della funzione obiettivo. Per esempio, nel programma

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ & 4x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1 + 2x_2 \le 1 \\ & x_1 \ge 0 \\ & x_2 \ge 0 \end{array}$$

possiamo notare che per ogni (x_1, x_2) nella regione ammissibile, la funzione obiettivo $x_1 + x_2$ soddisfa le disuguaglianze

$$x_1 + x_2 \le x_1 + 2x_2 \le 1$$

dove la prima disuguaglianza vale perché $x_2 \ge 0$ e la seconda è uno dei vincoli. Quindi 1 è un maggiorante all'ottimo. Possiamo migliorare il maggiorante usando combinazioni lineari dei vincoli,

$$x_1 + x_2 \le \frac{1}{7}\big(4x_1 + x_2\big) + \frac{3}{7}\big(x_1 + 2x_2\big) \le \frac{1}{7} \times 2 + \frac{3}{7} \times 1 = \frac{5}{7} \ .$$

Si noti che i coefficienti y_i di queste combinazioni lineari non possono essere negativi perché altrimenti cambieremmo segno alla disuguaglianza del vincolo.

In astratto, possiamo dire che se troviamo $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_m) \ge \boldsymbol{0}$ tale che

$$c_j \le \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \qquad j = 1, \dots, n$$

allora, per ogni $(x_1, \ldots, x_n)$ nella regione ammissibile,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \ . \tag{2}$$

Possiamo capire meglio passando alla notazione vettoriale. Se $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ soddisfa $\boldsymbol{c} \leq A^\top \boldsymbol{y}$ (dove $A^\top$ è la matrice trasposta di A), allora, per ogni $\boldsymbol{x}$ nella regione ammissibile,

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq \left(A^\top \boldsymbol{y}\right)^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^\top A \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \ . \tag{3}$$

Quindi, se indichiamo con $\boldsymbol{x}^*$ l'ottimo del programma (1), abbiamo che $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{c} \leq A^\top \boldsymbol{y}$ implicano $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^* \leq \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$. Il migliore maggiorante a $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^*$ sarà quindi l'ottimo del seguente programma lineare

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{4}$$

Il programma (4) è il duale del programma (1). Le derivazioni che abbiamo fatto implicano il seguente importante risultato.

Teorema 1 (Dualità debole) *Per ogni programma lineare (P) della forma (1) con duale (D) della forma (4), vale:*

1. *Se (P) e (D) sono entrambi limitati con soluzioni ottime $\boldsymbol{x}^*$ e $\boldsymbol{y}^*$, allora $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^* \leq \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}^*$.*
2. *Se (P) è illimitato, allora (D) non è ammissibile.*
3. *Se (D) è illimitato, allora (P) non è ammissibile.*

Dimostrazione. La parte 1 si ottiene osservando che (3) vale per ogni $\boldsymbol{x}$ ammissibile per (P) e per ogni $\boldsymbol{y}$ ammissibile per (D). Per dimostrare la parte 2 è sufficiente osservare che se (P) è illimitato, allora per qualunque $M > 0$ possiamo trovare un $\boldsymbol{x}$ nella regione ammissibile tale che $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \geq M$. Quindi non esiste nessun $\boldsymbol{y}$ tale che (3) valga per ogni $\boldsymbol{x}$ ammissibile. La parte 3 si dimostra analogamente. □

Se invece il primale fosse un problema di minimo ($\min \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$) allora il duale è un problema di massimo ($\max \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$) e se hanno entrambi soluzioni ottime finite allora

$$\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}^* \leq \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^* \ .$$

Ricapitolando, le variabili duali $\boldsymbol{y}$ corrispondono ai vincoli del primale, i vincoli del duale corrispondono alle variabili del primale, minimo e massimo si scambiano. La tabella qui sotto riassume le relazioni fra primale e duale.

Primale	Duale
variabili $x_1, \ldots, x_n$	n vincoli
funzione obiettivo $\boldsymbol{c}$	parte destra dei vincoli $\boldsymbol{c}$
parte destra dei vincoli $\boldsymbol{b}$	funzione obiettivo $\boldsymbol{b}$
$\max \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$	$\min \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$
matrice dei vincoli A	matrice dei vincoli $A^\top$
i-esimo vincolo $\leq$	$y_i \geq 0$
i-esimo vincolo $\geq$	$y_i \leq 0$
i-esimo vincolo $=$	$y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$	j-esimo vincolo $\geq$
$x_j \leq 0$	j-esimo vincolo $\leq$
$x_j \in \mathbb{R}$	j-esimo vincolo $=$

Studiamo ora il duale di un problema concreto, cioè il problema di flusso massimo su un grafo G (che, per semplicità, assumiamo sia aciclico). Diamo una formulazione LP leggermente diversa, basata sui cammini invece che sugli archi. Sia $\mathcal{P}$ l'insieme di tutti i cammini in G dal nodo sorgente s al nodo destinazione t. Sia $F : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ la funzione che assegna un flusso $F(P)$ ad un cammino P. Il valore di F è

$$V_F = \sum_{P \in \mathcal{P}} F(P) \ .$$

Un flusso F è ammissibile quando

$$\begin{aligned} &\sum_{P \,:\, e \in P} F(P) \leq c(e) \qquad \text{per tutti gli archi } e \in E \\ &F(P) \geq 0 \qquad \text{per tutti i } P. \end{aligned}$$

Informalmente, $F(P)$ è il contributo del cammino P al flusso di ogni arco $e \in P$. Quindi il flusso passante su un arco è la somma di tutti i contributi $F(P)$ dei cammini che includono l'arco. Il seguente risultato ci mostra che le due formulazioni del problema di flusso massimo sono equivalenti.

Lemma 2 *Esiste un flusso ammissibile f sugli archi con valore V_f se e solo se esiste un flusso ammissibile F sui cammini con lo stesso valore.*

Dimostrazione. Cominciamo a dimostrare che l'esistenza di un flusso ammissibile f implica l'esistenza di un flusso ammissibile F con lo stesso valore. Se f non è nullo, c'è almeno un cammino $P_1 \in \mathcal{P}$ i cui archi e soddisfano $f(e) \geq f(e_1)$ dove e_1 è l'arco di P_1 con flusso f minimo. Sia f_1 il nuovo flusso ottenuto definito come

$$f_1(e) = \begin{cases} f(e) - f(e_1) & \text{se } e \in P_1 \\ f(e) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si noti che f_1 è ancora ammissibile. Infatti i vincoli di capacità continuano banalmente ad essere rispettati, così come quelli di conservazione di flusso

$$\sum_{e \in E_v^-} f_1(e) = \sum_{e \in E_v^+} f_1(e) \qquad v \in V \setminus \{s, t\}$$

in quanto se v non è un vertice di P_1 allora $f_1(e) = f(e)$ per tutti gli archi incidenti a v. Mentre, se v è un vertice di P_1 allora $f_1(e) = f(e) - f(e_1)$ per $e \in E_v^-$ e $f_1(e) = f(e) - f(e_1)$ per $e \in E_v^+$. Infine, si noti che f_1 ha valore pari a $V - f(e)$.

Ripetiamo questa procedura finché non esiste più un cammino da s a t con flusso positivo. Dato che i flussi generati $f_1, \ldots, f_m$ sono tutti ammissibili, il flusso finale f_m deve essere zero su tutti gli archi. Quindi il costo del flusso originale può essere scritto come

$$V_f = \sum_{i=1}^{m} f(e_i)$$

dove $e_1, \ldots, e_m$ sono gli archi con flusso minimo sui cammini $P_1, \ldots, P_m$ trovati dalla procedura. Assegnamo $F(P_i) = f(e_i)$ per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $F(P) = 0$ per ogni altro $P \in \mathcal{P}$. Quindi F ha valore V_f e $F(P) \geq 0$ per ogni $P \in \mathcal{P}$. Inoltre,

$$\sum_{P\,:\,e\in P} F(P) \leq c(e) \qquad \text{per tutti gli archi } e \in E$$

vale per costruzione di F sotto l'ipotesi che il flusso iniziale f fosse ammissibile.

Dimostriamo ora che l'esistenza di un flusso ammissibile F con valore V_F implica l'esistenza di un flusso ammissibile f con lo stesso valore. Definiamo

$$f(e) = \sum_{P\,:\,e\in P} F(P)$$

Chiaramente, dato che

$$\mathcal{P} = \bigcup_{e\in E_s^+} \{P \,:\, e \in P\}$$

abbiamo che

$$V_f = \sum_{e\in E_s^+} f(e) = \sum_{e\in E_s^+} \sum_{P\,:\,e\in P} F(P) = \sum_{P\in\mathcal{P}} F(P) = V_F$$

Questo implica che il valore di f è lo stesso del valore di F. Inoltre, dato che F è ammissibile, f soddisfa i vincoli di capacità. Per quanto riguarda i vincoli di conservazione si noti che, per ogni $v \notin \{s, t\}$,

$$\sum_{e\in E_v^-} f(e) = \sum_{P\in\mathcal{P}\,:\,v\in P} F(P) = \sum_{e'\in E_v^+} f(e')\ .$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Diamo ora la formulazione LP del problema di flusso massimo espresso usando la funzione $F : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$. Le variabili di decisione sono rappresentate dal vettore $\boldsymbol{f}$ di $|\mathcal{P}|$ componenti. Sia $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ e sia A la matrice $|E| \times |\mathcal{P}|$ con elementi $A_{e,P} \in \{0, 1\}$ tali che $A_{P,e} = 1$ se e solo se $e \in P$. Sia infine $\boldsymbol{c}$ il vettore di $|E|$ Il problema di MaxFlow è quindi rappresentabile con il seguente LP:

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{f} \\ & A\boldsymbol{f} \leq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{f} \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{5}$$

Il duale di questo programma lineare è

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{\ell} \\ & A^\top \boldsymbol{\ell} \geq \mathbf{1} \\ & \boldsymbol{\ell} \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{6}$$

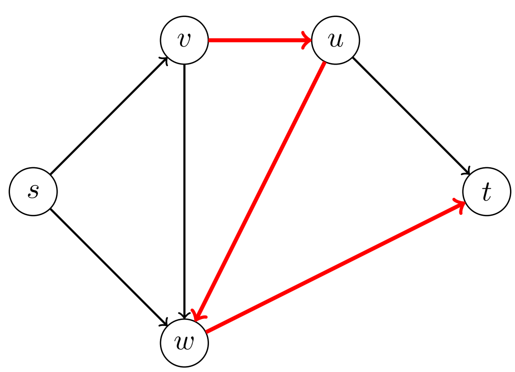
dove $\boldsymbol{\ell}$ è un vettore di $|E|$ componenti che rappresentano le variabili di decisione del problema duale. Per capire il duale lo scriviamo in forma estesa. Prima però, riscriviamo il vincolo del duale in modo da chiarirne il significato,

$$A^\top \boldsymbol{\ell} \geq \mathbf{1} \quad \text{equivale a} \quad \sum_{e \in E} A_{P,e} \ell_e \geq 1 \quad P \in \mathcal{P} \; .$$

Dato che $A_{P,e} = 1$ se e solo se $e \in P$ possiamo scrivere il duale come

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{e \in E} \ell_e & \\ & \sum_{e \in P} \ell_e \geq 1 & P \in \mathcal{P} \\ & \ell_e \geq 0 & e \in E \; . \end{array}$$

Scritto in questo modo, il duale di MaxFlow corrisponde ad un relassamento del problema di taglio minimo (MinCut) nel grafo G con pesi non negativi $c : E \to \mathbb{R}$ sugli archi. Un taglio $s - t$ di un grafo, dove $s, t \in V$, è definito da una bipartizione S, T dei vertici tale che $s \in S$ e $t \in T$. Il costo del taglio è $c(\Gamma) = \sum_{e \in \Gamma} c(e)$, dove $\Gamma = \Gamma(S,T) = \{(u,v) \in E : u \in S, \, v \in T\}$. Il problema di taglio minimo chiede appunto di trovare il taglio di costo minimo. Un taglio nella figura qui sotto è dato da $S = \{s, v, w\}$ and $T = \{u, t\}$ con $\Gamma = \{(v,u), (u,w), (w,t)\}$ indicato dagli archi rossi.



Assegnando una variabile di decisione $\ell_e \in \{0, 1\}$ a ciascun arco in modo che $\ell_e = 1$ se e solo se $e \in \Gamma$, vediamo che il problema MinCut corrisponde a

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{e \in E} c_e \ell_e & \\ & \sum_{e \in P} \ell_e \geq 1 & P \in \mathcal{P} \\ & \ell_e \in \{0,1\} & e \in E \; . \end{array} \tag{7}$$

I vincoli impongono che ogni cammino P da s a t abbia almeno un arco che appartiene al taglio Γ. Il problema (6) è equivalente a MinCut a meno del vincolo $\ell_e \in \{0,1\}$, che in (6) diventa $\ell_e \geq 0$. Possiamo quindi scrivere

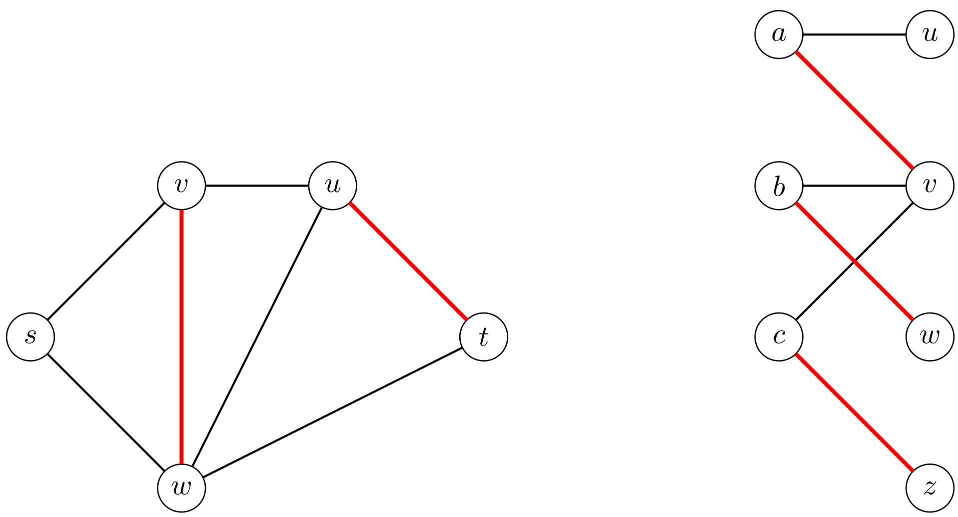
$$\text{ottimo di (5)} \leq \text{ottimo di (6)} \leq \text{ottimo di (7)}$$

dove la prima disuguaglianza vale per il teorema di dualità debole e la seconda disuguaglianza vale perché la soluzione ottima di (7) appartiene sempre alla regione ammissibile di (6).

Notiamo che, in generale, se troviamo $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{\ell}$ ammissibili per (5) e (6) e tali che $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{f} = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{\ell}$, allora sappiamo che sono soluzioni ottime. In realtà il teorema MaxFlow-MinCut ci dice che il valore del flusso massimo coincide **sempre** col valore del taglio minimo. In altre parole, è sempre possibile trovare un vettore binario $\boldsymbol{\ell}^* \in \{0,1\}^{|E|}$ tale che $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{f} = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{\ell}^*$.

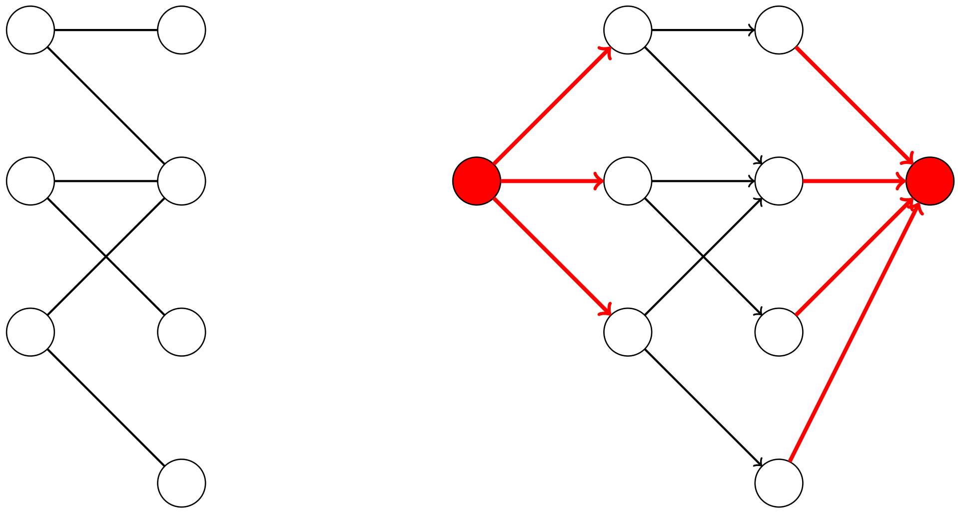
Quindi, nel caso dei problemi (5) e (6), la condizione $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{f} = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{\ell}$ è necessaria e sufficiente perché $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{\ell}$ siano ottime. Col teorema di dualità forte, dimostreremo che la stessa caratterizzazione vale per una qualsiasi coppia di problema primali e duali di LP.

Vediamo ora un altro esempio di problema su grafi che può essere risolto usando LP. Introduciamo la notazione $N_v = \{w : (v,w) \in E\}$ per indicare il vicinato di un vertice $v \in V$ in un grafo non orientato $G = (V,E)$. Un insieme indipendente di archi (detto anche **matching**) in G è un qualunque $E_0 \subseteq E$ tale che ogni coppia di archi in E_0 non ha vertici in comune. Un caso particolare del matching si ha quando G è bipartito, ovvero V può essere partizionato in due sottoinsiemi V_1, V_2 tali che non ci sono archi né fra coppie di vertici in V_1 né fra coppie di vertici in V_2. Nella figura qui sotto, il grafo di destra è bipartito. Gli archi rossi formano dei matching in entrambi i grafi.



Un matching E_0 è **perfetto** se ogni vertice di G è incidente ad un arco di E_0. Per esplorare la relazione fra matching e programmazione lineare consideriamo il problema di trovare in un grafo bipartito il matching di cardinalità massima. Questo problema può essere risolto mediante una riduzione polinomiale al problema di flusso massimo. La riduzione si appoggia al lemma seguente (che non dimostreremo).

Lemma 3 *Se in un problema di flusso massimo le capacità degli archi sono numeri interi, allora esiste sempre un flusso massimo f tale che $f(e)$ è un intero per ogni arco e.*



Teorema 4 *Il problema di matching massimo in un grafo bipartito è polinomialmente riducibile al problema di flusso massimo. Inoltre, la cardinalità del matching massimo è pari al valore del flusso massimo.*

Dimostrazione. Sia $G = (V, E)$ il grafo con bipartizione V_1, V_2. Costruiamo il grafo diretto $G' = (V', E')$ tale che $V' \equiv V \cup \{v_1, v_2\}$ e $E' \equiv E \cup E_1 \cup E_2$ dove $E_1 = \{(v_1, u) : u \in V_1\}$, $E_2 = \{(u, v_2) : u \in V_2\}$. Gli archi che erano già in E sono orientati da V_1 a V_2. Si veda la figura qui sopra. Infine, $c(e') = 1$ per ogni $e' \in E'$.

Sia f un flusso con valori interi (sappiamo che esiste per il Lemma 3) e dimostriamo che $E_0 \equiv \{e \in E : f(e) > 0\}$ è un matching di G. Notiamo che, per costruzione, ogni $u \in V_1$ ha un singolo arco entrante di capacità unitaria e ogni $v \in V_2$ ha un singolo arco uscente pure di capacità unitaria. Questo significa che al più un'unità di flusso può entrare in $u \in V_1$ e al più un'unità di flusso può uscire da $v \in V_2$. Per i vincoli di conservazione e per l'assunzione di integralità di f, ogni vertice $u \in V_1$ ha al più un arco uscente (u, v') con flusso positivo $f(u, v') = 1$. Simmetricamente, ogni vertice $v \in V_2$ ha al più un arco entrante (u', v) con flusso positivo $f(u', v) = 1$. Quindi nessun vertice in V può avere più di un arco incidente con flusso positivo, il che implica che E_0 è un matching.

Infine, per dimostrare che la cardinalità del matching è pari al valore del flusso massimo è sufficiente notare che

$$|E_0| = \sum_{e \in E} f(e) = \sum_{e \in E_s^+} f(e) = V_f$$

dove la seconda uguaglianza vale per i vincoli di conservazione del flusso. □

Quindi possiamo risolvere il problema del matching massimo formulandolo come il programma lineare associato al corrispondente problema di flusso massimo.