Complementi di Algoritmi e Strutture Dati

L'algoritmo di Karger per il taglio minimo in un grafo

Docenti: *Nicolò Cesa-Bianchi, Emmanuel Esposito* versione 26 maggio 2025

Si consideri un grafo non orientato $G = (V, E)$. Una partizione $S, T \subseteq V$ dei vertici di G (dunque, $S \cap T \equiv \emptyset$ e $S \cup T \equiv V$) è detta *ammissibile* se $S, T \not\equiv \emptyset$. Un *taglio* in G è un insieme $\Gamma(S,T) \equiv \{(u,v) \in E : u \in S,\, v \in T\}$ per una partizione ammissibile S, T dei vertici di G. In un grafo non pesato, il costo di un taglio corrisponde alla sua cardinalità $\big|\Gamma(S,T)\big|$. In quanto segue, consideriamo grafi non pesati e senza cappi (self-loop); tuttavia, ammettiamo la presenza di archi multipli fra coppie di nodi: questo tipo di grafo prende il nome di *multigrafo*. In questo caso, E è un multinsieme di archi, poiché archi fra coppie di vertici distinti possono essere presenti con molteplicità diverse.

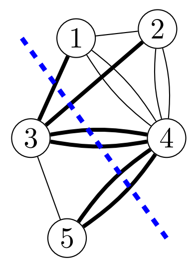

Figura 1: Un taglio in un multigrafo. Il taglio evidenziato è formato da 6 archi e corrisponde al multinsieme $\Gamma(S,T)$, dove $S = \{1, 2, 4\}$ e $T = \{3, 5\}$.

Il problema del taglio minimo (MinCut) in un multigrafo è definito nel modo seguente.

Problema **MinCut.**
Istanza: Un multigrafo $G = (V, E)$.
Soluzione: Una partizione ammissibile S, T di V che minimizza il costo $\big|\Gamma(S,T)\big|$.

Il problema MinCut ha tantissime applicazioni. Per esempio, in un sistema distribuito dove i nodi rappresentano processi e gli archi canali di comunicazione fra di essi, il taglio minimo corrisponde ad assegnare i processi a due CPU in modo che la comunicazione interprocessore —che è tipicamente lenta— sia minimizzata. Una seconda applicazione è la segmentazione di immagini. Qui i nodi rappresentano pixel e gli archi del grafo connettono pixel simili. Il taglio minimo corrisponde allora ad una segmentazione dell'immagine in due parti che sono fra loro il più dissimili possibile.

Il problema di MinCut è facilmente risolvibile in tempo polinomiale deterministico, per esempio usando l'algoritmo di Stoer–Wagner che ha un tempo di esecuzione dell'ordine $\mathcal{O}\big(|E||V| + |V|^2 \log|V|\big)$. Mostriamo ora un semplice algoritmo probabilistico Monte Carlo, l'algoritmo di Karger, che trova il taglio minimo con probabilità almeno $1 - \varepsilon$ in tempo pari a $\mathcal{O}\big(|E||V|^2 \log \frac{1}{\varepsilon}\big)$.

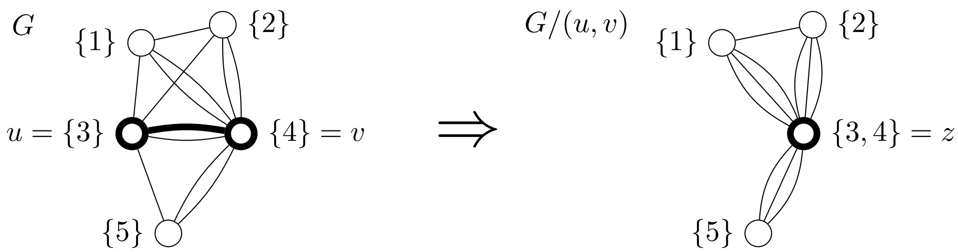

Figura 2: La contrazione di un arco in un multigrafo.

L'algoritmo di Karger è basato sull'operazione di contrazione di un arco (si veda la Figura 2). La *contrazione* di un arco (u, v) in un multigrafo G produce un multigrafo $G/(u, v)$ definito come risultato delle seguenti operazioni:

1. Un nuovo vertice z è aggiunto al grafo.
2. Ogni arco $(w, u) \in E$ con $w \neq v$ è sostituito da un arco (w, z).
3. Ogni arco $(w, v) \in E$ con $w \neq u$ è sostituito da un arco (w, z).
4. Gli archi del tipo (u, v) e i vertici u, v sono rimossi.

Nel seguito, diciamo che z è un supervertice che contiene u e v. Quando uno o entrambi i due vertici agli estremi di un arco contratto sono a loro volta supervertici, allora i nodi in essi contenuti diventano parte del nuovo supervertice.

Introduciamo ora l'algoritmo di Karger "base" che ripetutamente contrae archi a caso del multigrafo fino a quando il numero di supervertici rimanenti è pari a due. Dato che la contrazione di un arco riduce di uno il numero di supervertici, l'algoritmo si fermerà esattamente dopo $|V| - 2$ passi. A questo punto, l'algoritmo produce il cut corrispondente all'unica partizione ammissibile dei due supervertici. Dato che i supervertici del multigrafo finale corrispondono ad una partizione dei vertici del multigrafo iniziale, abbiamo ottenuto un taglio del multigrafo iniziale.

Algoritmo 1 KARGER-BASE(G)

Input: Multigrafo $G = (V, E)$ con $|V| \geq 2$

```
while |V| > 2 do
    Scegli un arco a caso (u, v) ∈ E
    G ← G/(u, v)
end while
```

Output: l'unica partizione ammissibile S, T rimasta in G

KARGER-BASE può essere implementato in tempo $\mathcal{O}(|E|)$ rappresentando la sequenza di contrazioni tramite una permutazione causale degli archi di G (dettagli omessi).

Vediamo ora qual è la probabilità che KARGER-BASE(G) ritorni una partizione ammissibile S^*, T^* fissata che definisce un taglio $\Gamma^* = \Gamma(S^*, T^*)$ di costo minimo k in G; in particolare

$$k = \left|\Gamma^*\right| = \min_{(S,T)} \left|\Gamma(S, T)\right|$$

dove il minimo è su tutte le partizioni ammissibili S, T di V. Per prima cosa, si noti che KARGER-BASE(G) ritorna Γ^* se e solo se nessun arco nel taglio viene contratto. Denotiamo ora con $X_1, \ldots, X_{|V|-2}$ la sequenza di archi contratti da Karger-Base(G). La probabilità che il primo arco X_1 contratto da Karger-Base sia nel taglio Γ^* corrisponde a

$$\mathbb{P}(X_1 \in \Gamma^*) = \frac{k}{|E|} \leq \frac{k}{|V|k/2} = \frac{2}{|V|}$$

perché la cardinalità di E è tale che

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{v \in V} d_v \geq \frac{1}{2}|V|d_{\min} \geq \frac{1}{2}|V|k \ ,$$

dove d_v è il grado di $v \in V$ in G (tenendo conto della molteplicità degli archi), mentre $d_{\min}$ è il grado minimo dei nodi del grafo. In particolare, si osservi che $d_{\min} \geq k$ è vero perché il costo k di un taglio minimo è sicuramente non superiore rispetto al costo d_v del taglio $\Gamma(\{v\}, V \setminus \{v\})$ per qualsiasi vertice $v \in V$. Quindi, $\mathbb{P}(X_1 \notin \Gamma^*) \geq 1 - \frac{2}{|V|}$.

La probabilità che il secondo arco contratto X_2 non sia nel taglio Γ^*, dato che $X_1 \notin \Gamma^*$, è

$$\mathbb{P}\big(X_2 \notin \Gamma^* \mid X_1 \notin \Gamma^*\big) = 1 - \mathbb{P}\big(X_2 \in \Gamma^* \mid X_1 \notin \Gamma^*\big) \geq 1 - \frac{k}{(|V|-1)k/2} = 1 - \frac{2}{|V|-1} \ .$$

In generale, denotando con A_i l'evento $X_i \notin \Gamma^*$ per $i \geq 1$, osserviamo che nessun arco di Γ^* è stato già contratto nel momento in cui dobbiamo scegliere X_i se condizioniamo sugli eventi $A_1, \ldots, A_{i-1}$. Il taglio Γ^* è dunque preservato sotto questo condizionamento. In aggiunta, al passo i-esimo, il grafo presenta $|V| - i + 1$ (super)vertici e un suo taglio minimo avrà ancora costo k condizionando su $A_1, \ldots, A_{i-1}$: le contrazioni si limitano a restringere le scelte di partizioni ammissibili dei vertici su cui valutare il costo dei taglio, e sappiamo che Γ^* è preservato.

Di conseguenza, abbiamo che

$$\mathbb{P}\big(A_i \mid A_1, \ldots, A_{i-1}\big) \geq 1 - \frac{k}{(|V|-i+1)k/2} = 1 - \frac{2}{|V|-i+1} \ .$$

Dunque, indicando convenzionalmente $\mathbb{P}(A_1 \mid A_0) = \mathbb{P}(A_1)$, dove A_0 corrisponde all'evento certo, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\text{Karger-Base(G) restituisce } \Gamma^*\big) = \mathbb{P}\Big(X_i \notin \Gamma^*, \forall i \in [|V|-2]\Big) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{|V|-2} A_i\right) \\
&= \prod_{i=1}^{|V|-2} \mathbb{P}\big(A_i \mid A_0, \ldots, A_{i-1}\big) \geq \prod_{i=0}^{|V|-3}\left(1 - \frac{2}{|V|-i}\right) = \prod_{i=0}^{|V|-3} \frac{|V|-i-2}{|V|-i} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{|V|-2} i}{\prod_{j=3}^{|V|} j} = \frac{(|V|-2)!}{\frac{|V|!}{2!}} = \frac{1}{\binom{|V|}{2}} \ . \qquad (1)
\end{aligned}$$

Possiamo amplificare la probabilità di successo eseguendo più volte Karger-Base(G) e scegliendo la partizione ammissibile che minimizza il costo del taglio fra tutte quelle ottenute. In particolare, se M è un numero sufficientemente grande, allora siamo in grado di ottenere un taglio di costo minimo in una delle M esecuzioni indipendenti di Karger-Base(G) con probabilità almeno $1-\varepsilon$, data una probabilità massima d'errore $\varepsilon \in (0, 1]$. Questa idea è implementata da Karger(G, ε).

Algoritmo 2 $\textsc{Karger}(G, \varepsilon)$

Input: Multigrafo $G = (V, E)$ con $|V| \geq 2$, parametro di confidenza $\varepsilon \in (0, 1]$

$M \leftarrow \left\lceil \binom{|V|}{2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$
for $i = 1, \ldots, M$ **do**
  $S_i, T_i \leftarrow \textsc{Karger-Base}(G)$
end for
$j \in \operatorname{argmin}_{i=1,\ldots,M} |\Gamma(S_i, T_i)|$

Output: S_j, T_j

Ripetendo $\textsc{Karger-Base}(G)$ per $M = \left\lceil \binom{|V|}{2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil = \mathcal{O}\big(|V|^2 \ln \frac{1}{\varepsilon}\big)$ volte e scegliendo un taglio di costo minimo fra quelli prodotti, la probabilità che questo non abbia costo ottimo (e dunque $\textsc{Karger}(G, \varepsilon)$ fallisce) è

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\textsc{Karger}(G, \varepsilon) \text{ fallisce}\big) &= \mathbb{P}\big(\big|\Gamma(S_i, T_i)\big| > k, \forall i \in [M]\big) && \text{(nessun taglio prodotto è minimo)} \\
&\leq \mathbb{P}\big(\Gamma(S_i, T_i) \not\equiv \Gamma^*, \forall i \in [M]\big) && \text{(nessun taglio prodotto è } \Gamma^*\text{)} \\
&= \mathbb{P}\big(\textsc{Karger-Base}(G) \text{ non restituisce } \Gamma^*\big)^M && \text{(indipendenza)} \\
&\leq \left(1 - \frac{1}{\binom{|V|}{2}}\right)^M && \text{(eq. (1))} \\
&\leq e^{-\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \ ,
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato la maggiorazione $1 - x \leq e^{-x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il tempo totale di esecuzione, considerando anche il costo di ciascuna contrazione, è quindi $\mathcal{O}\big(|E||V|^2 \ln \frac{1}{\varepsilon}\big)$.

Una versione più sofisticata, nota come algoritmo di Karger-Stein, trova un taglio di costo minimo con probabilità almeno $1 - \varepsilon$ in tempo $\mathcal{O}\big((|V| \ln |V|)^2 \ln \frac{1}{\varepsilon}\big)$.